

תורת ההסתברות והסטטיסטיקה

פרק 42 - המשתנה המקרי הדו ממדי הרציף

תוכן העניינים

1. משתנה דו ממדי רציף 1

משתנה מקרי דו ממדי רציף:

רקע:

יהיו X ו- Y משתנים מקריים רציפים המוגדרים בתחום R מסוים. פונקציית הצפיפות המשותפת שלהם תסומן על ידי $f(x, y)$. פונקציית צפיפות משותפת צריכה לקיים את שני התנאים הבאים:

$$(1) \quad f(x, y) \geq 0 \quad \text{לכל } (x, y) \in R$$

$$(2) \quad \iint_R f(x, y) dx dy = 1$$



דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} : \text{נתונה הפונקציה}$$

הראו שפונקציה זו יכולה להיות פונקציית צפיפות משותפת.

פונקציית צפיפות שולית:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy : \text{פונקציית הצפיפות השולית של } X \text{ תתקבל באופן הבא}$$

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx : \text{פונקציית הצפיפות השולית של } Y \text{ תתקבל באופן הבא}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} : \text{מצאו לפונקציית הצפיפות}$$

את פונקציית הצפיפות השולית של X , וחשבו את $E(X)$ דרכה.

אי-תלות בין משתנים רציפים:

X ו- Y יהיו משתנים מקרים בלתי תלויים, אם עבור כל X ו- Y בתחום ההגדרה R מתקיים ש:

$$f(x, y) = f(x) \cdot f(y)$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

האם X ו- Y , המתפלגים לפי פונקציית הצפיפות המשותפת:

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

הם משתנים בלתי תלויים?

חישוב הסתברויות עבור משתנה מקרי רציף דו ממדי:

הנפח הכלוא מתחת למשטח $f(x, y)$ בתחום מסוים ייתן את ההסתברות ש- X

$$\text{ו-} Y \text{ יהיו בתחום הזה: } P[(x, y) \in A] = \iint_A f(x, y) dx dy$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

$$P(X < 0.5 \cap Y < 0.5) \quad \text{חשבו את הסיכוי:}$$

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת:

פונקציית התפלגות מצטברת משותפת הינה פונקציה של שני משתנים רציפים המחזירה את הסיכוי שהמשתנים יהיו קטנים מערכים מסוימים:

$$F(s, t) = P(X \leq s \cap Y \leq t) = \int_{-\infty}^t \int_{-\infty}^s f(x, y) dx dy$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

מצאו את פונקציית ההתפלגות המצטברת המשותפת

$$\text{ועל פיה חשבו את הסיכוי: } P(X < 0.5 \cap Y < 0.5)$$

פונקציית צפיפות מותנית:

אם ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x, y)$, אז מגדירים את פונקציית הצפיפות המותנית של X , בהינתן ש- $Y = y$ לכל ערכי y

$$\text{המקיימים: } f(y) > 0 \text{ על ידי: } f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f(y)}$$

באופן דומה, פונקציית הצפיפות המותנית של Y בהינתן ש- $X = x$ לכל ערכי x

$$\text{המקיימים: } f(x) > 0 \text{ על ידי: } f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f(x)}$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

$$\text{מצאו את: } f(x|y)$$

תוחלת מותנית:

ל- X ול- Y ישנה פונקציית צפיפות משותפת $f(x, y)$.

$$\text{התוחלת של } X \text{ בהינתן ש- } Y = y \text{ תהיה: } E(X|Y=y) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x|y) dx$$

ובאופן דומה, התוחלת של Y בהינתן ש- $X = x$ תהיה:

$$E(Y|X=x) = \int_{-\infty}^{\infty} y \cdot f(y|x) dy$$

דוגמה (פתרון בהקלטה):

$$f(x, y) = \begin{cases} 4x(1-y) & 0 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{משתנים מתפלגים לפי פונקציית הצפיפות:}$$

$$\text{מצאו את: } E(X|Y)$$

שאלות:

- (1) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = x + y$, המוגדרת בתחום שבו: $0 \leq x \leq 1$ וגם: $0 \leq y \leq 1$. הוכיחו שמדובר בפונקציית צפיפות.
- (2) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = Ax(x - y)$, המוגדרת בתחום שבו: $0 \leq x \leq 2$ וגם: $-x \leq y \leq x$. מצאו את ערכו של הפרמטר A .
- (3) נתונה פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = \frac{(x \cdot y)^3 + x \cdot y}{C}$, המוגדרת בתחום שבו: $0 \leq x \leq 1$ וגם: $0 \leq y \leq 1$.
 א. מצאו את ערכו של C .
 ב. מצאו את $f(y)$.
 ג. האם X ו- Y הינם משתנים בלתי תלויים?
- (4) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה: $f(x, y) = \frac{1}{800}$, המוגדרת בתחום שבו: $60 \leq x \leq y$ וגם: $60 \leq y \leq 100$.
 א. הראו שפונקציה זו מקיימת את התנאים של פונקציית צפיפות.
 ב. מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של Y .
 ג. חשבו את $E(X)$, $V(X)$.
 ד. האם X ו- Y הם משתנים בלתי תלויים?
 ה. חשבו את מקדם המתאם בין X ל- Y .
 ו. חשבו את הסיכוי: $P(Y > X + 10)$.
- (5) משתנה מקרי דו ממדי מתפלג לפי פונקציית הצפיפות הבאה:
 $f(x, y) = \lambda\mu \cdot e^{-(\lambda x + \mu y)}$, המוגדרת בתחום שבו: $x, y > 0$.
 א. מצאו את פונקציית הצפיפות של X ואת פונקציית הצפיפות של Y .
 ב. האם X ו- Y הם משתנים תלויים?
 ג. מהו מקדם המתאם בין X ל- Y ?
 ד. חשבו את הסיכוי: $P(Y > X)$.

(6) Y הינו משתנה מקרי אחיד רציף המתפלג בקטע: $[2, 4]$.

בנוסף, נתון ש- X הינו משתנה מקרי רציף המקיים: $0 \leq x \leq y$, $f(x|y) = \frac{2x}{y^2}$.
מצאו את השונות המשותפת של X ו- Y .

(7) נתונים שני משתנים מקרים רציפים X ו- Y . פונקציות הצפיפות

$$f(x, y) = \begin{cases} x & 0 < y < 1 \\ 0 & 1 - y \leq x \leq 1 + y \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

המשותפות שלהם היא:

- מצאו את $f(x)$.
- מצאו את $f(y|x)$.
- מצאו את $E(Y|X)$.

(8) יהיו X ו- Y משתנים רציפים המתפלגים אחיד בתוך משולש שקדקודיו: $(-1, 2)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$.

- רשמו את פונקציית הצפיפות המשותפת.
- מצאו את פונקציית הצפיפות השולית של X ו- Y .
- חשבו את התוחלת של X ו- Y .
- האם X ו- Y משתנים בלתי מתואמים?
- האם X ו- Y משתנים בלתי תלויים?

(9) פונקציית צפיפות משותפת מקבלת ערך אחיד באופן הבא:

הצפיפות על פני משולש A הינה 1.5 והצפיפות על פני משולש B היא 0.5.
האם פונקציית הצפיפות המשותפת היא לגיטימית?



- מצאו את $f(x)$.
- מצאו את $f(x|y)$.

(10) נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x, y) = cx$. פונקציה זו מוגדרת

בתחום שבו: $0 \leq x \leq 1$ וכן: $0 \leq y \leq x^2$.

- מצאו את הקבוע C .
- חשבו את ההסתברות ש- $6Y < 1 - X$.

11 נתונים X ו- Y שני משתנים מקריים רציפים כך ש: $Y \sim U(0,1)$

ו- $X|Y=y \sim U(0, \sqrt{y})$. חשבו את: $E(Y|X=0.5)$.

12 נתונה פונקציית הצפיפות: $f(x,y) = 2e^{-x} \cdot e^{-2y}$ בתחום שבו: $x, y \geq 0$.

חשבו את הסיכוי: $P(X < Y)$.

13 נתונה פונקציית הצפיפות המשותפת: $f(x,y) = \frac{e^{-y} \cdot e^{-\frac{x}{y}}}{y}$, המוגדרת לרביע הראשון. חשבו את: $P(X > 1|Y=2)$.

14 יוסי וערן עובדים באותו המשרד. הם מגיעים לעבודה בכל יום בין 8:00 ל-9:00.

נניח שזמן ההגעה של כל אחד מתפלג אחיד ובאופן בלתי תלוי זה בזה.

מה הסיכוי שיוסי יצטרך לחכות לערן יותר מ-10 דקות?

15 נתונים שני משתנים מקרים רציפים: $X \sim N(Y,1)$ ו- $Y \sim U(0,2)$.

א. מצאו את פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y .

ב. מצאו את $E(X^2|Y)$.

ג. מצאו את $E(X)$.

16 פונקציית הצפיפות המשותפת של X ו- Y היא: $f(x,y) = 1$.

פונקציה זו מוגדרת בתחומי: $0 \leq x, y \leq 1$.

הוכיחו ש: $E(|X-Y|^n) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}$.

17 $X \sim \exp(1)$ וכן: $Y \sim \exp(1)$, הינם משתנים מקרים בלתי תלויים.

נגדיר את: $Z = \frac{X}{X+Y}$.

הוכיחו: $Z \sim U(0,1)$.

תשובות סופיות:

(1) שאלת הוכחה.

(2) $A = \frac{1}{8}$

(3) א. $\frac{5}{16}$ ב. $f(y) = 0.8y^3 + 1.6y$ ג. תלויים.

(4) א. שאלת הוכחה. ב. $f(y) = \frac{y-60}{800}$ ג. $E(X) = 73\frac{1}{3}$, $V(X) = 88\frac{8}{9}$

ד. לא. ה. 0.5 ו. 0.5625

(5) א. $f(y) = \mu e^{-\mu y}$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ ב. לא.

ג. 0. ד. $\frac{\lambda}{\lambda + \mu}$

(6) $\frac{2}{9}$

(7) א. $f(x) = \begin{cases} x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 2x - x^2 & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$$E(y|x) = \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x}{2} & 1 \leq x \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ג.}$$

$$f(y|x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & 0 \leq x < 1 \quad 1-x < y < 1 \\ \frac{1}{2-x} & 1 \leq x \leq 2 \quad x-1 < y < 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

(8) א. $f(x, y) = \begin{cases} 1 & 1+x < y < 1-x-1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

$$f(y) = \begin{cases} y & 0 \leq y < 1 \\ 2-y & 1 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}, \quad f(x) = \begin{cases} -2x & -1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} \quad \text{ב.}$$

ג. $E(X) = -\frac{2}{3}$, $E(Y) = 1$ ד. כן.

ה. לא.

(9) א. כן. ב. $f(x) = \begin{cases} 1.5 - x & 1 < x < 0 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

ג. $f(x|y) = \begin{cases} \frac{1.5}{1.5-y} & 0 \leq x < 1-y \\ \frac{0.5}{1.5-y} & 1-y \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$

(10) א. 4. ב. 0.0947.

(11) $\frac{7}{12}$

(12) $\frac{1}{3}$

(13) $e^{-\frac{1}{2}}$

(14) $\frac{25}{72}$

(15) א. $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-y)^2}{2}} & 0 < y < 2 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$ ב. $y^2 + 1$

ג. 1.

(16) שאלת הוכחה.

(17) שאלת הוכחה.